Feladat 1. (1pt) Adja meg a $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ homomorfizmusok számát, és azt is, hogy ezek közül mennyi az injektív, illetve a szürjektív.

Feladat 2. (1pt) Adja meg a $\mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ homomorfizmusok számát, és azt is, hogy ezek közül mennyi az injektív, illetve a szürjektív.

Feladat 3. (1pt) Adja meg a $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{12}$ homomorfizmusok számát, és azt is, hogy ezek közül mennyi az injektív, illetve a szürjektív.

Feladat 4. (1pt) Adja meg a $\mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfizmusok számát, és azt is, hogy ezek közül mennyi az injektív, illetve a szürjektív.

Feladat 5. (1pt) Melyik kettő izomorf a következők közül: $\mathbf{A}_4/[(12)(34),(13)(24)]$, $\mathbf{S}_3/[(12)]$, $\mathbb{Z}_9/\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_9/3\mathbb{Z}_9$? (Itt $3\mathbb{Z}_9$ a $\mathbb{Z}_9$-ben 3-mal osztható elemek–azon elemek, amelyek előállnak $a + a + a$ alakban–halmaza)?

Feladat 6. (2pt) Tekintsük az S_5 csoport $H = [(123),(12),(45)]$ részcsoportját. Hány elemű H? Határozza meg $|g_iH \cap Hg_i|$-t $i = 1, 2, 3$-ra, ha $g_1 = (23415)$, $g_2 = (34)(12)$, $g_3 = (312)(54)$.

Feladat 7. (2pt) Igaz-e, hogy ha egy csoport tetszőleges normálosztójának tetszőleges normálosztója az eredeti csoportnak is normálosztója, akkor a csoport Abel-féle?

Feladat 8. (2pt) Adja meg a $\mathbf{V} \to \mathbf{Q}$ homomorfizmusok számát, és azt is, hogy ezek közül mennyi az injektív, illetve a szürjektív.

Feladat 9. (2pt) Izomorfak-e az $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ csoportok?

Feladat 10. (2pt) Melyik az a legkisebb elemszámú $\mathbf{G}$ csoport, melynek van olyan $\mathbf{H}$ normálosztója, hogy $\mathbf{H}$-nak van olyan normálosztója, ami $\mathbf{G}$-nek nem normálosztója?

Feladat 11. (2pt) Egy $\mathbf{G}$ csoport g_1 és g_2 elemeit *konjugáltnak* nevezzük (jelölés: $g_1 \sim g_2$), ha van olyan $h \in G$ elem, melyre $h^{-1}g_1h = g_2$. $\sim$ ekvivalencia reláció, ezt ennél a feladatnál nem kell megmutatni. Mik a hozzá tartozó osztályozás elemei, ha $\mathbf{G} = \mathbb{Z}_8$, illetve ha $\mathbf{G} = \mathbf{D}_8$?

Feladat 12. (2pt) Egy $\mathbf{G}$ csoport g_1 és g_2 elemeit *konjugáltnak* nevezzük (jelölés: $g_1 \sim g_2$), ha van olyan $h \in G$ elem, melyre $h^{-1}g_1h = g_2$. $\sim$ ekvivalencia reláció, ezt ennél a feladatnál nem kell megmutatni. Mik a hozzá tartozó osztályozás elemei, ha $\mathbf{G} = \mathbf{S}_3$, illetve ha $\mathbf{G} = \mathbf{S}_4$?

Feladat 13. (2pt) Egy $\mathbf{G}$ csoport g_1 és g_2 elemeit *konjugáltnak* nevezzük (jelölés: $g_1 \sim g_2$), ha van olyan $h \in G$ elem, melyre $h^{-1}g_1h = g_2$. $\sim$ ekvivalencia reláció, ezt ennél a feladatnál nem kell megmutatni. Mik a hozzá tartozó osztályozás elemei, ha $\mathbf{G} = \mathbf{A}_4$?

Feladat 14. (3pt) Legyen $\mathbf{G}$ egy csoport, és $\mathbf{N}$ egy normálosztója. Tetszőleges $g \in G$ esetén definiáljuk a $\overline{\rho}_g : G/\mathbf{N} \mapsto G/\mathbf{N}$ leképezést a következő módon: bármely $h \in G$-re legyen $(h/\mathbf{N})\overline{\rho}_g := (hg)/\mathbf{N}$. Igazolja, hogy a $\overline{\rho}_g$ leképezés jóldefiniált. Akkor is jóldefiniált marad, ha $\mathbf{N}$-ről csak azt tételezzük fel, hogy részcsoportja $\mathbf{G}$-nek?

Feladat 15. (3pt) Tekintsük a 14. Feladatban definiált $\overline{\rho}_g$ leképezéseket egy $\mathbf{N} \lhd \mathbf{G}$ esetén. Igazolja, hogy a $\mathbf{G} \to \mathbf{S}_{G/\mathbf{N}}$, $g \mapsto \overline{\rho}_g$ leképezés homomorfizmus, és határozza meg a magját.

Feladat 16. (3pt) Igaz-e, hogy a kör szimmetriacsoportja izomorf $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$-vel? Igaz-e, hogy van köztük injektív, illetve szürjektív homomorfizmus?

Feladat 17. (3pt) A Cayley-reprezentációt felhasználva igazolja, hogy ha n páratlan szám, akkor minden n rendű csoport beágyazható $\mathbf{A}_n$-be. (Egy $\mathbf{H}$ csoport beágyazható egy $\mathbf{G}$ csoportba, ha $\mathbf{G}$-nek van $\mathbf{H}$-val izomorf részcsoportja, vagyis létezik injektív homomorfizmus $\mathbf{H}$-ból $\mathbf{G}$-be.)

Feladat 18. (3pt) Legyen $\mathbf{G}$ csoport, $\mathbf{N}$ egy normálosztója, valamint $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}/\mathbf{N}$. Igazolja, hogy ha a $\mathbf{H}' := \{g \in G : g/\mathbf{N} \in H\}$ csoport normálosztó $\mathbf{G}$-ben, akkor $\mathbf{H}$ normálosztó $\mathbf{G}/\mathbf{N}$-ben. (Egyébként $\mathbf{H}'$-t szokás a $\mathbf{H}$ $\mathbf{N}$-nel vett felfújtjának is nevezni.)

Feladat 19. (4pt) Igazolja, hogy ha $\mathbf{G}$ véges csoport, $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$, akkor minden $g \in \mathbf{G}$ esetén $gH \cap Hg$ elemszáma osztja H elemszámát.

Feladat 20. (4pt) Tekintsük a $d(x, y, z) := x - y + z$ háromváltozós műveletet a $\mathbf{G}$ Abel-csoporton. Egy $A \subseteq G$ halmazt *megőrzi* a d műveletet, ha tetszőleges $a_1, a_2, a_3 \in A$ esetén $d(a_1, a_2, a_3) \in A$. Igazolja, hogy az A halmazt pontosan akkor őrzi meg a d, ha van olyan $\mathbf{H}$ részcsoportja $\mathbf{G}$-nek, hogy A egy $\mathbf{H}$ szerinti mellékosztály.